Polynômes de Bernstein

Il s'agit ici de construire des suites explicites de polynômes convergeant uniformément vers une fonction continue f donnée sur un segment de R à valeurs complexes.

1°) Montrer que l'on peut supposer que la fonction continue f est définie sur [0,1] et à valeurs réelles.

2°) Prouver, pour x dans [0,1], l'identité : $\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$

(introduire la fonction de deux variables $g(u,v) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k} = (u+v)^n$.)

3) On introduit la suite de polynômes $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$.

Soit $\varepsilon > 0$, l'uniforme continuité de f fournit un $\alpha > 0$ tel que, pour tout (x,y) de $[0,1]^2$, on ait : $|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Soit x dans [0,1]. Notons A l'ensemble des entiers k de [0,n] tel que $|x - \frac{k}{n}| \leq \alpha$ et B le complémentaire de A.

a) Prouver l'inégalité : $|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\| f \|_\infty}{2\alpha^2 n} + \varepsilon$.

On traitera séparément les cas des indices de B et de A.

b) Montrer que la suite de polynômes converge uniformément vers f sur [0,1].

Densité : théorèmes de Korovkin.

1) Soit f une application de [0,1] dans R, continue. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0, \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + k(x-y)^2.$$

2) Soit B_n une suite d'applications linéaires de C([0,1],R) dans lui-même vérifiant :
i - pour tout n, B_n est positif, c'est à dire que, si $f \geq 0$, $B_n(f) \geq 0$
ii - si f_i est la fonction continue qui à x donne x^i ($i \geq 0$), les suites $n \to B_n(f_i)$ convergent uniformément vers f_i pour i = 0,1,2.

$|S_n|||$ $= |B_n(X_{i})|$

a) Prouver que les applications B_n sont croissantes et que $|||B_n|||$ est uniformément bornée.

b) Pour tout (x,y) de $[0,1]^2$ et tout ε de $]0,+\infty[$ on écrit, avec les notations de 1)

$$f(y) - \varepsilon - k(x-y)^2 \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon + k(x-y)^2$$

UCV
opér
bornés

En appliquant correctement B_n à l'inégalité ci-dessus montrer que, pour tout fonction f de C([0,1],R), la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f.

$\to f\ [0,1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} [0,1]$ homéo

Mq $(\exists P_n \in R[X]^N)$ $(P_n \xrightarrow{CVU} f$ et $\forall n, P_n$ homéo $[0,1] \to [0,1])$

P_n de classe $\mathcal{C}^0$ sur [0,1] (on dérive P_n ...)